Heltonの定理の半古典的類似 (力学系と微分幾何学)

楯, 辰哉

数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 106-122

Heltonの定理の半古典的類似

楯　辰哉*
東北大学大学院理学研究科D3

Helton の定理とは, コンパクト多様体上の１階楕円型作用素の固有値の差の集積点全体の集合と対応するハミルトン流の周期性に関する定理である(詳しくは第１章参照). この文章の目標は, 磁場つきシュレディンガー作用素の固有値の差のある意味での集積点全体の集合に関する, Helton の定理の半古典的類似と思える結果を紹介することにある. 第１章では, 表題にもある, スペクトル幾何で古くから知られている Helton の定理を簡単に紹介する. 第２章では, この文章で問題とする作用素, 磁場つきシュレディンガー作用素について説明し, この作用素によって生成される量子力学に対応する古典力学である magnetic flow と呼ばれる力学系を第３章で説明する. 第４章, 第５章で主定理の主張とその証明の概略を述べ, 最後 (第６章) で例を２つほど述べることにする.

なお第 4, 5 章における議論は, より一般の力学系に対しても通用することを, あらかじめ注意しておく. この一般的な設定については, 参考文献 [G-U2], [T1], [Z1] を参照してください.

1　Heltonの定理

M をコンパクトなリーマン多様体, $\hat{H}$ を M 上の１階非負値楕円型擬微分作用素とする. 作用素 $\hat{H}$ の固有値を $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \cdots \uparrow \infty$ とする. また, 正の数 $\lambda > 0$ と実数直線 $\mathbf{R}$ の開区間 I に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda) &= \{ j \in \mathbf{N} ;\, e_j \leq \lambda \}, \\ N(\lambda; I) &= \sharp\{ (j,k) \in \mathcal{N}(\lambda) \times \mathbf{N} ;\, e_k - e_j \in I \} \end{aligned}$$

とおく.

定義 1 実数 τ が固有値の差の集合 $\{e_j - e_k\}_{j,k\in\mathbf{N}}$ の集積点 (cluster point) とは, τ を含む任意の開区間 I に対して, $\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda; I) = \infty$ となることと定義する. また, この意味での集積点全体の集合を $D\sigma(\hat{H})$ と表わすことにする.

---

*Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science. E-mail address: 94m11@math.tohoku.ac.jp

集合 $D\sigma(\hat{H})$ は実数内の閉集合であることに注意しておく. 次の補題は明らかな主張ではあるが, 定義 1 の直観的な理解に役立つであろうと思われる.

補題 1 実数 τ が固有値の差の集合 $\{e_j - e_k\}_{j,k\in\mathbf{N}}$ の定義 1 の意味での集積点であるためには, $\mathbf{N}^2$ の (無限) 部分列 $\{(j_l, k_l)\}_{l=1}^{\infty}$ が存在して, $\lim_{l\to\infty}(e_{k_l} - e_{jl}) = \tau$ が成り立つことが必要十分である.

注意 1 集合 $\{e_k - e_j\}$ の定義 1 の意味での集積点は通常用いられる意味での集積点とはことなる. 実際, 補題 1 において, $j_l = k_l = l$ ととると, 点列 $\{(j_l, k_l)\}$ は無限部分列であり, $e_{k_l} - e_{j_l} = 0$ だから, 0 はいつでも定義 1 の意味での集積点となる. しかし, M として標準的な n 次元球面とし, $\hat{H}$ を標準的なリーマン計量によるラプラシアンとすると, $\hat{H}$ の固有値は, $\lambda_p = \sqrt{p(p+n-1)}$ (p は 0 以上の整数) となるが, 不等式

$$|\sqrt{p(p+n-1)} - \sqrt{q(q+n-1)}| \geq |p-q| \tag{1}$$

により, 0 は通常の意味での集積点とはならない.

さて, 定義 1 を用いると, Helton の定理は次のように述べることができる.

定理 1 (Helton) 作用素 $\hat{H}$ は上記のものとする. このとき, 作用素 $\hat{H}$ の主表象によって生成されるハミルトン流が周期的でないならば, $D\sigma(\hat{H}) = \mathbf{R}$ となる.

作用素 $\hat{H}$ がラプラシアンのときには, 更に次が成り立つ.

定理 2 (Helton-Guillemin) $\hat{H} = \sqrt{\Delta_M}$ (Δ_M は多様体 M 上のラプラシアン) とする. このとき, 測地流が周期的であることと, ある正の定数 $T > 0$ が存在して $D\sigma(\sqrt{\Delta_M}) = \{\frac{2\pi n}{T}; n \in \mathbf{Z}\}$ となることは同値である. このとき定数 T は測地流の最小共通周期を表わす.

注意 2 定理 2 において作用素 $\hat{H}$ がラプラシアンの平方根であるという制約は, 測地流という対応する古典力学が, 周期的ならば共通周期をもつ, という性質をもつ ([W]) ことによる. また, 定理 1, 2 において, 作用素 $\hat{H}$ が 1 階であるという仮定は本質的である. 実際, 2 次元の平坦トーラス $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上の (平方根をとらない 2 階の微分作用素としての) ラプラシアン Δ の固有値は $4\pi^2|\alpha|^2$ ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z}^2$, $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_1^2$) であるから, それらの差は整数の $4\pi^2$ 倍であり, $D\sigma(\Delta) \subset 4\pi^2\mathbf{Z}$.

例 1 $M = S^n$ (半径 1 の球面) とし $\hat{H} = \sqrt{\Delta_M}$ とする. M の測地流は周期的で周期 2π. 一方, $\hat{H}$ の固有値は注意 1 の通りである. n を勝手な整数として $p_l = l + n$, $q_l = l$ ($l \geq -n$) とする. このとき, $e_{k_l} = \lambda_{p_l}$, $e_{j_l} = \lambda_{q_l}$ となる番号 (j_l, k_l) を取ってくると, $e_{k_l} - e_{j_l} \to n$ ($l \to \infty$) となる. 逆に, $e_{k_l} - e_{j_l} \to \tau \in \mathbf{R}$ ($l \to \infty$) となる列 (j_l, k_l) が存在したとすると, $e_{k_l} = \lambda_{p_l}$, $e_{j_l} = \lambda_{q_l}$ となる自然数 p_l, q_l をとれば, 式 (1) より, $p_l - q_l$ は有界. これらは整数だから, 有限個の l を除き $p_l - q_l =$ 一定. したがって $\tau \in \mathbf{Z}$.

例 2 $M = T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ (2 次元トーラス) とし, $\hat{H} = \sqrt{\Delta_M}$ とする. 測地流は周期的ではない. $\hat{H}$ の固有値は, 注意 2 を参照. 任意の有理数 $\tau = q/p \in \mathbf{Q}$, $p, q > 0$ に対して, $\alpha_l = (2pql^2, 0)$, $\beta_l = (2pql^2, 2ql) \in \mathbf{Z}^2$ とおくと, $2\pi|\alpha_l|$, $2\pi|\beta_l|$ は $\hat{H}$ の固有値で, $e_{j_l} = 2\pi|\alpha_l|$, $e_{k_l} = 2\pi|\beta_l|$ となる番号 (j_l, k_l) をとれば, $e_{k_l} - e_{j_l} \to 2\pi q/p$ $(l \to \infty)$ となる. 負の有理数に対しては j_l と k_l の役割を入れ替えればよいから $2\pi\mathbf{Q} \subset D\sigma(\hat{H})$. $D\sigma(\hat{H})$ が閉集合であり, $2\pi\mathbf{Q}$ が $\mathbf{R}$ で稠密であることに注意すれば $D\sigma(\hat{H}) = \mathbf{R}$ となる.

定理 1, 2 において考察されている作用素の主表象は, 余接束上の関数として 1 次斉次であり, 余接束の標準的なシンプレクティック形式の斉次性によりハミルトン流も斉次性を持つ. すなわち, 各々のエネルギー一定曲面上で, 力学系として同型となる. しかし, 例えば種数 2 以上の負定曲率-1のリーマン面で magnetic flow (定義は第 3 章を参照) を考えると, エネルギーレベルがある一定値以上でエルゴード的であるが, その一定値より小さいエネルギーレベルでは力学系は周期的になる, という事象が起こる ([G-U1], [Su]). この様にエネルギーレベルに関して斉次性のない古典力学の周期性と, それに対応する量子力学を生成する作用素の固有値の差の集合の性質の間にはどのような関係があるのだろうか. この問題に対して, 一つの方針を与え, 定理 1 の類似の結果を紹介することを, 以後の目標とする.

2　磁場つきシュレディンガー作用素

この章では, 磁場つきシュレディンガー作用素の定義を与える. この文章の冒頭にも述べたが, 以下の設定はもう少し一般 (ファイバーがコンパクトな連結リー群である主束) にしても次章以後の考察はそのまま成り立つが, 話しを簡明にするため, また, 特に重要な例がある主 S^1 束に限って話しを進める.

コンパクトな n 次元リーマン多様体 (M, g_M) 上の主 S^1 束 $\pi : P \to M$ を考え, P 上に接続 1 形式 Θ を 1 つとり固定する. 但し Θ が接続 1 形式であるとは, S^1-作用で不変で, $\Theta(\partial_\theta) = 1$ を満たす実数値微分 1 形式のことである. ここで $\partial_\theta = \left.\dfrac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} p \cdot e^{i\theta}$, $p \in P$ は P 上の S^1-作用を生成するベクトル場である. 正の定数 $V > 0$ を一つ固定する. このとき P 上のリーマン計量

$$g_P(u, v) := g_M(d\pi(u), d\pi(v)) + V^{-2}\Theta(u)\Theta(v), \quad u, v \in TP \tag{2}$$

が定まる.

補題 2 S^1 の P への作用は g_P に関して等長的であり, したがって, g_P に関するラプラシアンの平方根 $\hat{H} := \sqrt{\Delta_P}$ は S^1 作用と可換である.

補題 2 は Θ が S^1-作用で不変であることから明らか.

補題 3 リーマン計量 g_P によって定まるリーマン測度に関する P 上の 2 乗可積分な関数のなすヒルベルト空間 $L^2(P)$ は, 次のように直和分解される:

$$L^2(P) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}_m. \tag{3}$$

但しここで $\mathcal{L}_m$ は, 次で定義される, $L^2(P)$ の閉部分空間である:

$$\mathcal{L}_m := \{ f \in L^2(P) ; R_z f = z^{-m} f, z \in S^1 \}. \tag{4}$$

また, $(R_z f)(p) := f(pz)$ は S^1 の $L^2(P)$ への作用を表わす.

証明. 数々の証明方法があるが, ここでは比較的簡単な証明をつけておく. 作用素 $\hat{H} = \sqrt{\Delta_P}$ は自己共役な楕円型作用素であるから, $L^2(P)$ は $\hat{H}$ の固有空間の直和に分解され, 各固有空間は有限次元である. リーマン計量の S^1 不変性により S^1 の $L^2(P)$ への表現 R は, ユニタリ表現である. 作用素 $\hat{H}$ が S^1-作用と可換であるから, 表現 R を各固有空間に制限でき, それらも, S^1 のユニタリ表現となる. したがって, $\hat{H}$ の各固有空間は S^1 の既約表現で直和分解される. 部分空間 $\mathcal{L}_m$ は, こうして得られた S^1 の既約表現たちのうち, 指標 $S^1 \ni z \mapsto z^{-m} \in S^1$ と同値なもの全ての直和である. ∎

定義 2 作用素 $\hat{H} = \sqrt{\Delta_P}$ の部分空間 $\mathcal{L}_m$ への制限を $\hat{H}_m$ と書き, 磁場つきシュレディンガー作用素と呼ぶ.

ここで, 作用素 $\hat{H}_m$ を磁場つきシュレディンガー作用素と呼ぶ理由について簡単に説明しておく.

接続 1 形式 Θ の曲率形式を $\boldsymbol{B}$ と表す: $d\Theta = \pi^* \boldsymbol{B}$. 微分形式 $\boldsymbol{B}$ は多様体 M 上の閉 2 形式であり, 従って M 上に磁場を定める. 一方, 主 S^1 束 $\pi : P \to M$ の局所的な切断により接続形式 Θ を引き戻した, M 上で局所的に定義された 1 形式を $\boldsymbol{A}$ で表すと, $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ となる. すなわち, 1 形式 $\boldsymbol{A}$ は磁場 $\boldsymbol{B}$ のベクトル・ポテンシャルであることに注意しておく. このベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて, 作用素 $\hat{H}_m$ を局所表示するために, いくつかの言葉を準備する.

直積空間 $P \times \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ は複素数体) 上に S^1-作用を次で定義する:

$$z(p, w) = (pz^{-1}, \chi_m(z) w), \ z \in S^1, \ (p, w) \in P \times \mathbf{C}, \tag{5}$$

但し, $\chi_m(z) = z^m$. この S^1-作用による商空間 L^m は多様体 M の上の複素直線束となる. 直線束 L^m には $\mathbf{C}$ のエルミート内積により自然にエルミート計量が定まる. また, P 上の接続形式 Θ により直線束 L^m 上に, エルミート計量と両立する接続 ∇_m が定まる. M 上のリーマン測度 (の $1/2\pi$ 倍) に関する L^m の 2 乗可積分な切断のなすヒルベルト空間を $L^2(M, L^m)$ と書く.

補題 4 P 上の関数 $f \in C^\infty(P) \cap \mathcal{L}_m$ に対して, 直線束 L^m の滑らかな切断 $U_m f$ を次で定義する:

$$U_m f(x) = [p, f(p)] \in L^m, \quad x \in M, \ p \in P, \ \pi(p) = x. \tag{6}$$

このとき, U_m はユニタリ作用素 $U_m : \mathcal{L}_m \to L^2(M, L^m)$ に拡張される. 更に, $L^2(M, L^m)$ 上の作用素として次が成り立つ.

$$U_m \hat{H}_m U_m^{-1} = \sqrt{\nabla_m^* \nabla_m + m^2 V^2} \tag{7}$$

但し, ∇_m^* は接続 ∇_m の L^2-内積による形式的共役を表す.

補題4により作用素 $\hat{H}^2$ と, 作用素 $\nabla_m^* \nabla_m + m^2 V^2$ を同一視すると, $\nabla_m^* \nabla_m^*$ の項を局所表示すれば $\hat{H}$ の形が分かる. ベクトル・ポテンシャルを $\boldsymbol{A} = \sum A_i dx^i$ と表しておくと実は局所的に,

$$\nabla_m^* \nabla_m = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + m\sqrt{-1} A_j \right) g^{ij} \sqrt{G} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + m\sqrt{-1} A_i \right) \tag{8}$$

と表される. ここで, (g_{ij}) は M のリーマン計量の成分, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $G = \det(g_{ij})$ である. そこで, 我々はパラメータ m (整数) をプランク定数の逆数 $\hbar^{-1}$ であると考える. すると, 式(7), (8) により作用素 $\hat{H}_m$ は物理学で考えられている, 電場 $-\nabla V$ (ここでは ∇ は関数の勾配を表す) 磁場 $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ の中を運動する質量 1, 電荷 -1 の電子に対するシュレディンガー作用素 (の $\hbar^{-2}$ 倍) と形が酷似していることから, 作用素 $\hat{H}$ は磁場つきシュレディンガー作用素と呼ばれている.

注意 3 ここで説明した設定では, V は正の定数であった. したがって電場$= 0$ となってしまうが, 実は, M 上の任意の正の関数 V に対して同様の設定を考えることができる. そのためには P 上のリーマン計量 g_P の定義式 (2) の V を M 上の正の関数としラプラシアンのある1階の摂動を施した作用素を考えればよい.

3 Magnetic flow

この章では, magnetic flow と呼ばれる, M の余接束 $\pi_M : T^*M \to M$ 上のハミルトン力学系の定義を述べる.

余接束 T^*M 上で次の様なハミルトニアン H とシンプレクティック形式 Ω を考える.

$$H(x, \xi) = \sqrt{\|\xi\|^2 + V^2}, \quad \Omega = \Omega_M - \pi_M^* \boldsymbol{B}, \tag{9}$$

但し, $\|\xi\|$ は余接ベクトル ξ のリーマン計量 g_M に関するノルム, Ω_M は T^*M 上の標準的なシンプレクティック形式で局所的に, $\Omega_M = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge d\xi_i$ と表される2形式である. X_H で H と Ω によって定まるハミルトンベクトル場とする.

定義 3 ベクトル場 X_H によって生成される 1 係数変換群のエネルギー一定曲面 $\Sigma_e = H^{-1}(e)$ $(e > V)$ への制限をφ_t^e と書き, 磁場 $\boldsymbol{B}$ の下での magnetic flow と呼ぶ.

注意 4 $V = 0$, $\boldsymbol{B} = 0$ のとき, 流れ φ_t^e は測地流と一致する.

上の定義では, 前章の主 S^1 束に関する設定との関係が明らかではない. そこで以下では, magnetic flow が前章の主 S^1 束の余接束 T^*P 上の力学系を "簡約" して得られることを説明する.

まず, P 上の S^1-作用を次のように余接束上にリフトする:

$$z(p,\zeta) = (pz^{-1}, z^*\zeta),\ z \in S^1,\ (p,\zeta) \in T^*P. \tag{10}$$

この作用はハミルトン的であり, その運動量写像は次で与えられる:

$$\Phi : T^*P \to \mathbf{R},\ \Phi(p,\zeta) = \zeta(\partial_\theta), \tag{11}$$

但し, ∂_θ は P 上の S^1-作用を生成するベクトル場である. このとき, $Z = \Phi^{-1}(1) \subset T^*P$ は $2n+1$ 次元の部分多様体となり, S^1 の Z への作用は自由であるからその商空間 $B = Z/S^1$ は多様体となる. 次の補題は "Marsden-Weinstein の簡約" と呼ばれる定理の特別な場合である.

補題 5 多様体 B には, Z 上で次を満たすシンプレクティック形式 $\tilde{\Omega}$ が一意的に存在する:

$$\iota^*\Omega_P = \Pi^*\tilde{\Omega}, \tag{12}$$

ここで, $\iota : Z \hookrightarrow T^*P$ は埋め込み, $\Pi : Z \to B$ は自然な射影, Ω_P は T^*P の標準的なシンプレクティック形式である.

シンプレクティック多様体 $(B, \tilde{\Omega})$ を調べるために次のように考察を進める. 任意の $(p,\zeta) \in T^*P$ に対して余接ベクトル$\xi = \zeta - \Phi(p,\zeta)\Theta_p \in T_p^*P$ は $\xi(\partial_\theta) = 0$ を満たすから, 自然に T_x^*M, $x = \pi(p)$ の元を定めることに注意する. 従って, 写像 $\tilde{\Pi} : T^*P \to T^*M$ を定める.

補題 6 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\ \iota\ } & T^*P \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\Pi}} \\ B & \xrightarrow{\ f\ } & T^*M \end{array}$$

ここで, $f([p,\zeta]) = \tilde{\Pi}(p,\zeta)$. このとき, f は B と T^*M の間の微分同型で, $f^*\Omega = \tilde{\Omega}$ を満たす.

第2章で考えた作用素 $\hat{H}=\sqrt{\Delta_P}$ の主表象$\sigma(\hat{H})$ は次で与えられる:

$$\sigma(\hat{H})(p,\zeta)=\sqrt{g_P(\zeta,\zeta)}.$$

従って $\sigma(\hat{H})$ と Ω_P によって定まるハミルトン流 ϕ_t は, リーマン多様体 (P,g_P) の測地流である. $\{\sigma(\hat{H}),\Phi\}=0$ ($\{,\}$ はポワッソン積) であるから, 流れ ϕ_t は T^*P 上の S^1-作用と可換であり, また, ϕ_t は $Z=\Phi^{-1}(1)$ に制限できる. ϕ_t をエネルギー一定曲面と Z との交わり $Z_e=\sigma(\hat{H})^{-1}(e)\cap Z$ へ制限したものを ϕ_t^e で表す. Z_e は T^*P 内の $2n$ 次元部分多様体である. このとき, 次が成り立つ.

補題 7 補題6の可換図式において, $(\tilde{\Pi}\circ\iota)^*H=\iota^*\sigma(\hat{H})$ が成り立つ. 従って, $\tilde{\Pi}(Z_e)=\Sigma_e$ であるが, 更に次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} Z_e \arrow[r, "\phi_t^e"] \arrow[d, "\Pi_0"'] & Z_e \arrow[d, "\Pi_0"] \\ \Sigma_e \arrow[r, "\varphi_t^e"] & \Sigma_e \end{tikzcd}$$

但し, $\Pi_0=\tilde{\Pi}|_{Z_e}$.

補題7により, T^*P 上の測地流 ϕ_t によって引き起こされる $Z_e/S^1\subset B=Z/S^1$ 上の流れが, シンプレクティック同型 $f:(B,\tilde{\Omega})\to(T^*M,\Omega)$ を通して Σ_e 上の magnetic flow φ_t^e と同型であることが分かる.

注意 5 古典力学 (magnetic flow) φ_t^e は, この様に T^*P 上の古典力学 (測地流) を簡約して得られることが分かった. 一方第2章では, 磁場つきシュレディンガー作用素 $\hat{H}_m$ をラプラシアン $\hat{H}=\sqrt{\Delta_P}$ の閉部分空間 $\mathcal{L}_m$ への制限として定義した. つまりこの設定においては, 古典力学における S^1-対称性による簡約と, 量子力学における S^1 の既約表現から定まる閉部分空間への制限が対応しており, その意味で, 作用素 $\hat{H}_m$ はラプラシアン $\hat{H}$ を "簡約" して得られる作用素であるといえる.

この章の最後に, 主定理の証明で必要になる次の補題を準備しておく.

補題 8 $\Sigma_e\subset T^*M$ 上の任意の滑らかな関数 $a\in C^\infty(\Sigma_e)$ に対して, $T^*P\setminus 0$ ("0" はゼロ切断) 上の S^1-作用で不変な0次斉次の滑らかな関数 $\tilde{a}\in C^\infty(T^*P\setminus 0)$ が存在して, Z_e 上で次を満たす:

$$\Pi_0^*a=\tilde{a}|_{Z_e}. \tag{13}$$

逆に, $T^*P\setminus 0$ 上の S^1 不変な0次斉次な関数 $\tilde{a}$ に対して Σ_e 上の滑らかな関数 a が存在して Z_e 上, 式(13)を満たす.

証明. Z_e は エネルギー一定曲面$\sigma(\hat{H})^{-1}(e) \subset T^*P$ 内の閉部分多様体であることに注意すると, Z_e 上の滑らかな関数 $\Pi_0^* a$ を$\sigma(\hat{H})^{-1}(e)$ 上の滑らかな関数に拡張できることが分かる. 但し, もちろんこの拡張は一意的ではない. そうやって得られた関数を $a_0 \in C^\infty(\sigma(\hat{H})^{-1}(e))$ と表す. この関数を, $T^*P \setminus 0$ 上の関数に 0 次斉次な関数 $\tilde{a}_0$ に拡張する. つまり, $\tilde{a}_0(p,\zeta) = a_0(p, \dfrac{e\zeta}{\sigma(\hat{H})(p,\zeta)})$. このとき, 任意の $(p,\zeta) \in Z_e$ に対して,

$$\tilde{a}_0(p,\zeta) = a_0(p,\zeta) = \Pi_0^* a(p,\zeta). \tag{14}$$

そこで, 関数 $\tilde{a}$ を次で定義する:

$$\tilde{a}(p,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \tilde{a}_0(e^{i\theta}(p,\zeta))\,d\theta.$$

このとき, 関数 $\tilde{a}$ は S^1-作用で不変であり, 関数 $\Pi_0^* a$ が Z_e 上の関数として S^1-作用で不変だから式 (14) により Z_e 上で式 (13) を満たす. 逆は明らか. ∎

4 主定理

我々の目標は, magnetic flow φ_t^e の周期性と磁場つきシュレディンガー作用素 $\hat{H}_m$ の固有値の差の $m \to \infty$ ($\hbar \to 0$ に対応) のときの "何らかの意味での" 集積点の集合の関係を調べることであった. そこでこの章では, まず集積点の定義を明らかにし, 次に主定理を述べる.

$e_1(m) \le e_2(m) \le \cdots \uparrow \infty$ を作用素 $\hat{H}_m$ の固有値とする. ここで, $e_j(m) \to \infty$ $(j \to \infty)$ であることは, 第 2 章の補題 3 の証明, あるいは, 補題 4 から従う. また正の数 $e > V$ を 1 つ固定する. この定数 e は第 3 章に現われるものに対応している. このとき, 正の整数 $m \in \mathbf{Z}$ と実数直線 $\mathbf{R}$ 内の開区間 I に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_m(e) &= \{\, j \in \mathbf{N}\,;\, |e_j(m) - me| \le 1 \,\}, \\ N_m(e;I) &= \sharp\{\, (j,k) \in \mathcal{N}_m(e) \times \mathbf{N}\,;\, e_k(m) - e_j(m) \in I \,\} \end{aligned}$$

とおく. あとでも述べるが, 集合 $\mathcal{N}_m(e)$ の個数は, 第 1 章で述べた設定における集合 $\mathcal{N}(\lambda)$ の個数 (λ 以下の固有値の個数) に対応している.

定義 4 実数 τ が集合 $\{e_k(m) - e_j(m)\}_{j,k,m\in\mathbf{N}}$ のエネルギー e においての (半古典極限に関する) 集積点であるとは, 実数 τ を含む任意の開区間 I に対して, $\lim_{m\to\infty} N_m(e;I) = \infty$ となることと定義する. またエネルギー e での集積点全体を $s\text{-}D\sigma_e$ と表すことにする.

補題 9 任意の $e > V$ に対して, 集合 $s\text{-}D\sigma_e$ は作用素 $\hat{H} = \sqrt{\Delta_P}$ の固有値の差の定義 1 の意味での集積点全体 $D\sigma(\hat{H})$ の部分集合である.

証明. $\tau \in s\text{-}D\sigma_e$ とし, I を, τ を含む開区間とする. 任意の自然数 $m \in \mathbf{N}$ に対して, $\lambda_m = me + 1$ とすると, λ_m は m に関して単調であり,

$$N_m(e; I) \leq N(\lambda_m; I) \to \infty \ (m \to \infty) \tag{15}$$

が成り立つ. 自然数 $N(\lambda; I)$ は λ に関して単調であるから式(15)により $N(\lambda; I) \to \infty$ $(\lambda \to \infty)$. 開区間 I は任意でるから主張が従う. ∎

注意 6 補題9により T^*P 上の測地流が周期的である場合には, 集合 $s\text{-}D\sigma_e$ は, 離散的に現われることが分かる. 実際このとき, Helton の定理 (定理1) により,

$$s\text{-}D\sigma_e \subset D\sigma(\sqrt{\Delta_P}) = \frac{2\pi}{T}\mathbf{Z}.$$

我々の主定理は, 定義4を用いて次のように述べることができる.

定理 3 magnetic flow φ_t^e の周期点全体の集合のリウヴィル測度が0であると仮定する. このとき, $s\text{-}D\sigma_e = \mathbf{R}$ が成り立つ.

次の系は, 定義4, 定理3により直ちに従う.

系 1 magnetic flow φ_t^e の周期点全体の集合のリウヴィル測度が0であると仮定する. このとき, 任意の実数 τ に対して, ある部分列 $\mathbf{N} \ni m_l \uparrow \infty \, (l \uparrow \infty)$, $j_l \in \mathcal{N}_{m_l}(e)$, $k_l \in \mathbf{N}$ が存在して $\lim_{l\to\infty}(e_{k_l}(m_l) - e_{j_l}(m_l)) = \tau$ となる.

5 主定理の証明の概要

この章では, 主定理の証明について述べる. まず, 記号の復習と準備から始める.

任意の $e > V$ を固定する. 正の定数 V は, 式(2) に現われたものであり, e は力学系のエネルギー準位を表すものであった. また, $\Sigma_e = H^{-1}(1)$ と置いていた. ここで, H は第2章で現われた T^*M 上のハミルトニアン $H(x,\xi) = \sqrt{\|\xi\|^2 + V^2}$ である. そこで, Σ_e 上の正規化されたリウヴィル測度 $d\omega_e$ に関する2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(\Sigma_e)$ と表し, その上のユニタリ作用素の1係数群 U_t^e を, $U_t^e a = a \circ \varphi_t^e$, $a \in L^2(\Sigma_e)$ で定義する. このとき, Stone-von Neumann の定理によって U_t^e は次のようにスペクトル分解される:

$$U_t^e = \int_{\mathbf{R}} e^{it\lambda} \, dE_e(\lambda). \tag{16}$$

このとき $L^2(\Sigma_e)$ 上の稠密に定義された自己共役作用素 S_e を次で定義する:

$$S_e = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, dE_e(\lambda). \tag{17}$$

自己共役作用素 S_e は, ハミルトニアン H とシンプレクティック形式 Ω によって定まるハミルトンベクトル場 X_H の L^2-拡張になっていることに注意する.

補題 10 magnetic flow φ_t^e が周期的でないならば $\mathrm{Spec}(S_e) = \mathbf{R}$ が成り立つ. 但し, $\mathrm{Spec}(S_e)$ は, 自己共役作用素 S_e のスペクトルを表す.

補題10の証明はしない. この補題は, もともとの Helton の定理 (1) の証明で用いられたものであり, [G], [H] にある証明がそのままここでの設定でも通用する. 注意することは, 作用素 S_e のスペクトル $\mathrm{Spec}(S_e)$ は単位の分解 E_e の台 (support) と一致するということである. つまり,

$$\mathrm{Spec}(S_e) = \bigcap\{I \subset \mathbf{R};\, I \text{ は閉集合で } E_e(I) = \mathrm{Id}\},$$

となる. この式は以後断わらずに用いるので注意してほしい.

次に S. Zelditch [Z2] による "スペクトル測度の補題" と呼ばれる補題について説明しなければならない.

任意の整数 $m \in \mathbf{Z}$ に対して, $\{\varphi_j^m\}_{j\in\mathbf{N}}$ を $L^2(P)$ の閉部分空間 $\mathcal{L}_m$ の磁場つきシュレディンガー作用素 $\hat{H}_m$ の固有関数からなる正規直交基底とする. $L^2(P)$ 上の S^1-作用と可換な任意の有界線形作用素 A に対して, そのエネルギー e での "空間平均", $\langle A \rangle_e$ をもし極限が存在するなら次の式で定義する:

$$\langle A \rangle_e = \lim_{m\to\infty} N_m(e)^{-1} \sum_{j\in\mathcal{N}_m(e)} \langle A\varphi_j^m,\, \varphi_j^m \rangle, \tag{18}$$

但しここで, $N_m(e)$ は集合 $\mathcal{N}_m(e)$ の個数 $N_m(e) = \sharp\mathcal{N}_m(e)$ である. もちろん式(18)の極限は任意の有界線形作用素 A に対して存在するかは分からない. しかし有界作用素 A が, 0階の擬微分作用素であるときには式(18)の極限の存在が, 次の Guillemin-Uribe [G-U1], [G-U2], Zelditch [Z1] による半古典的 Szegö 極限公式とでも呼ぶことができる公式により保証される.

定理 4 (Guillemin-Uribe, Zelditch) magnetic flow φ_t^e の周期点全体のリウヴィル測度が0であると仮定する. このとき, P 上の S^1-作用と可換な0階の擬微分作用素 A に対して次が成り立つ.

$$\sum_{j\in\mathcal{N}_m(e)} \langle A\varphi_j^m,\, \varphi_j^m \rangle = 2(2\pi)^{-n} m^{n-1} \int_{\Sigma_e} \sigma(A)\, d\omega_e + o(m^{n-1}), \tag{19}$$

但し, 式(19)の右辺に現われる測度 $d\omega_e$ は正規化していないリウヴィル測度であり, 関数 $\sigma(A)$ は作用素 A の主表象である.

注意 7 式(19)の右辺の被積分関数 $\sigma(A)$ は正確には $T^*P \setminus 0$ 上の関数である. 作用素 A が S^1-作用と可換であるとき, その主表象$\sigma(A)$ は S^1 作用で不変な関数になる. 従って, 補題8によって, Σ_e 上の関数を定めることに注意する. 式(19)の右辺はこの様にして定まる関数の積分である. また, 式(19)において, $A = 1$ とすると, $N_m(e) = 2(2\pi)^{-n} m^{n-1}\,\mathrm{vol}(\Sigma_e) + o(m^{n-1})$ となる. これは, 古くから知られる Weyl の漸近公式の半古典バージョンとも言うべき公式である.

注意 8 問題の舞台がユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の場合にも定理 4 に対応した結果が Petkov-Robert [P-R] 等によって知られている．ただその場合，考える作用素 $\hat{H}_\hbar$ は，Weyl 型の擬微分作用素と呼ばれる，調和振動子などの作用素を含む作用素のクラスになる．

スペクトル測度の補題を述べるために，いま 1 つ定理を引用しなければならない．

P 上の 1 階非負値楕円型擬微分作用素 $\hat{H} = \sqrt{\Delta_P}$ に対して，$L^2(P)$ 上のユニタリ作用素 $e^{it\hat{H}}$, $t \in \mathbf{R}$ を，次で定義する．

$$e^{it\hat{H}} f = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{ite_j(m)} \langle f, \varphi_j^m \rangle \varphi_j^m, \tag{20}$$

$$f = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_j^m \rangle \varphi_j^m \in L^2(P). \tag{21}$$

滑らかな関数 $f \in C^\infty(P)$ に対して $u(t,p) = e^{it\hat{H}} f(p)$, $p \in P$ と置くと，関数 $u(t,p)$ は $\mathbf{R} \times P$ 上の滑らかな関数であり，次の双曲型方程式を満たす．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i\hat{H}u \\ u(0,p) &= f(p) \end{aligned}$$

定理 5 (Egorov) P をコンパクトなリーマン多様体，$\hat{H} : C^\infty(P) \to C^\infty(P)$ を 1 階の非負値楕円型擬微分作用素とする．このとき，任意の μ階の擬微分作用素 A, $(\mu \in \mathbf{R})$ に対し，作用素 $e^{it\hat{H}} A e^{-it\hat{H}}$ も μ階の擬微分作用素となり，その主表象は，$\sigma(A)\circ\phi_t$ で与えられる．ここで，ϕ_t は $\hat{H}$ の主表象 $\sigma(\hat{H})$ と T^*P 上の標準的なシンプレクティック形式によって定まるハミルトン流である (第 2 章参照)．

証明は省略する ([Ta] 等を参照) が多少説明しておく．

作用素 $A(t) = e^{it\hat{H}} A e^{-it\hat{H}}$ を形式的に微分すると

$$A'(t) = i[\hat{H}, A(t)] \tag{22}$$

となるが，もし $A(t)$ が擬微分作用素で，その主表象が $a(t)$ であったとすると，関数 $a(t)$ は式 (22) の両辺の主表象をとることにより，次の微分方程式を満たさなくてはならないことが分かる．

$$a'(t) = \{\sigma(\hat{H}), a(t)\}. \tag{23}$$

ここで，$\{,\}$ はポワッソン積である．方程式 (23) の解が $\sigma(A)\circ\phi_t$ で与えられる，という分けである．

注意 9 定理 5 の作用素 A は任意階でよいが，作用素 $\hat{H}$ は 1 階でなければならない．ラプラシアンなどの 2 階の作用素の平方根をとる理由はこの様な事情のためである．

補題 11 magnetic flow φ_t^e の周期点全体のリウヴィル測度が 0 であると仮定する．また，S^1-作用と可換な P 上の 0 階の擬微分作用素 A を 1 つ固定する．実数直線上の，コンパクトな台を持つ任意の滑らかな関数 $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ に対して，極限

$$m_A^e(f) := \lim_{m\to\infty} N_m(e)^{-1} \sum_{j\in\mathcal{N}_m(e)} \sum_k f(e_k(m) - e_j(m)) |\langle A\varphi_j^m, \varphi_j^m \rangle|^2 \tag{24}$$

は収束する．

証明． 補題の主張に現われた A, f と，正の数 $R > 0$ に対して，次の様な L^P 上の有界作用素を考える:

$$\begin{aligned} A_f &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(t) e^{it\hat{H}} A e^{-it\hat{H}}\, dt, \\ A_f^R &= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{f}(t) e^{it\hat{H}} A e^{-it\hat{H}}\, dt, \end{aligned}$$

但し，$\hat{f}$ は $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ の Fourier 変換

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ixt} f(x)\, dx$$

である．このとき，Egorov の定理 (定理 5) により，作用素 A_f^R は P 上の S^1-作用と可換な 0 階の擬微分作用素となる．(作用素 A_f は擬微分作用素とは限らない.) $\hat{f}$ は Schwartz クラスの関数であるから，

$$\|A_f^R - A_f\| \to 0 \ (R \to \infty),$$

但し，$\|\cdot\|$ は作用素ノルムである．また，空間平均 $\langle A \rangle_e$ のノルム連続性 $|\langle A \rangle_e| \le \|A\|$ により，$\langle A^* A_f \rangle_e$ が存在することが分かる．このとき，式 (20) を用いた直接計算により，$m_A^e(f) = \langle A^* A_f \rangle_e$ となる．∎

補題 11 により m_A^e は $C_c^\infty(\mathbf{R})$ 上の正値線形汎関数となり，実数直線 $\mathbf{R}$ 上の Borel 測度 dm_A^e を定める．

任意の関数 $a \in L^2(\Sigma_e)$ に対して単位の分解 E_e に関するスペクトル測度を $d\mu_a^e$ で表す．つまり，実数直線 $\mathbf{R}$ 上の任意の Borel 集合 Λ に対して，$\mu_a^e(\Lambda) = \|E_e(\Lambda)a\|^2$ である．

補題 12 (スペクトル測度の補題 Zelditch[Z2]) magnetic flow φ_t^e の周期点全体のリウヴィル測度が 0 であると仮定する．このとき，P 上の S^1-作用と可換な任意の 0 階の擬微分作用素 A に対して，$dm_A^e = d\mu_{\sigma(A)}^e$ が成り立つ．

証明． Egorov の定理 (定理 5) により任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して，$A(t) = e^{it\hat{H}} A e^{-it\hat{H}}$ は S^1-作用と可換な 0 階の擬微分作用素であり，その主表象の Z_e への制限は$\sigma(A)\circ\phi_t^e$ で与えられる (記号は第 3 章を参照)．この関数は T^*P 上の S^1-作用で不変であるから

補題8により Σ_e 上の関数を定めるが補題7によりその関数は $U_t^e\sigma(A)$ に他ならない. 従って, 定理4により,

$$(U_t^e\sigma(A),\, \sigma(A))_{L^2(\Sigma_e)} = \langle\, A^*A(t)\,\rangle_e$$

となる. このとき, 任意の $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ に対して式(16)を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}
\int f\, d\mu_{\sigma(A)} &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(t)(U_t^e\sigma(A),\, \sigma(A))_{L^2(\Sigma_e)}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(t)\langle\, A^*A(t)\,\rangle_e\, dt \\
&= \langle\, A^*A_f\,\rangle_e \\
&= \int f\, dm_A
\end{aligned}$$

となる. ∎

最後に次の命題を示す. この命題と補題10を組み合わせて, 主定理を得る.

命題 1 magnetic flow φ_t^e の周期点全体のリウヴィル測度が0であると仮定する. このとき, $\mathrm{Spec}(S_e) \subset s\text{-}D\sigma_e$ が成り立つ.

証明. 実数 τ がエネルギー e での集積点ではないとする: $\tau \notin s\text{-}D\sigma_e$. このとき, 定義3より τ を含む開区間 I, 正の整数の部分列 $\{m_l\}_{l\in\mathbf{N}}$, そして, 正の定数 $C > 0$ が存在して, $m_l \uparrow \infty$ $(l \uparrow \infty)$ でありかつ, 任意の $l \in \mathbf{N}$ に対して $N_{m_l}(e; I) \le C$ が成り立つ. $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ をその台が開区間 I に含まれる関数とし, $L^2(\Sigma_e)$ 上の有界線形作用素 $f(S_e)$ を考える. P 上の S^1-作用と可換な任意の0階の擬微分作用素 A に対して補題12により,

$$\begin{aligned}
(f(S_e)\sigma(A),\, \sigma(A))_{L^2(\Sigma_e)} &= \int f\, d\mu_{\sigma(A)} \\
&= \int f\, dm_A \\
&= \lim_{m\to\infty} S_m(A, f) \\
&= \lim_{l\to\infty} S_{m_l}(A, f),
\end{aligned}$$

但しここで,

$$S_m(A, f) = N_m(e)^{-1} \sum_{j\in\mathcal{N}_m(e)} \sum_{k\in\mathbf{N}} f(e_k(m) - e_j(m))|\langle\, A\varphi_j^m,\, \varphi_k^m\,\rangle|^2.$$

と置いた. ここで, $S_{m_l}(A, f)$ を次のように評価する:

$$\begin{aligned}
|S_{m_l}(A, f)| &\le \|A\|^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|^2 \frac{N_{m_l}(e; I)}{N_{m_l}(e)} \\
&\le C\|A\|^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|^2 N_{m_l}(e)^{-1}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

注意7により, $N_{m_l}(e) \to \infty$ $(l \to \infty)$ であるから, 式(25)の最後の項は0に収束する. 従って, $(f(S_e)\sigma(A),\, \sigma(A))_{L^2(\Sigma_e)} = 0$. 補題8により任意の滑らかな関数 $a \in C^\infty(\Sigma_e)$ に対して, $(f(S_e)a,\, a)_{L^2(\Sigma_e)} = 0$ となる. よって, 任意の関数 $a, b \in C^\infty(\Sigma_e)$ に対して,

$$(f(S_e)a,\, b)_{L^2(\Sigma_e)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n (f(S_e)(a + i^n b),\, a + i^n b)_{L^2(\Sigma_e)} = 0.$$

つまり, $f(S_e) = 0$ となる. 関数 $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ はその台が開区間 I に含まれる限り任意であったから, 実数 τ は単位の分解 E_e の台, すなわち $\mathrm{Spec}(S_e)$ に含まれない. ∎

注意 10 命題1も, もともとの Helton の定理(定理1)の証明において現われるものである. しかしその証明は, そのままではここでの設定においては通用しない.

6 周期的な magnetic flow (例)

前章までで, 主定理の証明が終わった. 主定理は, エネルギー e での magnetic flow φ_t^e が周期的とは遠い性質を持つとき, 磁場つきシュレディンガー作用素 $\hat{H}_m$ の固有値の差のエネルギー e での集積点全体の集合が, 実数直線全体になる, と言うものであった. それでは, magnetic flow φ_t^e が周期的であるとき, 集合 $s\text{-}D\sigma_e$ はどのような構造を持つのであろうか. ここでは, 2つの例を見てみることにする.

例 1. $P = S^3 = \mathrm{SU}(2)$ とし, $M = S^2$ とおく. SU(2) のリー環 $su(2)$ に随半作用で不変な内積 $\langle A, B \rangle_{su(2)} = 2\mathrm{Tr}(B^* A)$ を固定しておく. このとき,

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

はリー環 $su(2)$ の正規直交基底であり, 次を満たす.

$$[e_1, e_2] = e_3, \ [e_2, e_3] = e_1, \ [e_3, e_1] = e_2.$$

つまり, $su(2) \cong \mathbf{R}^3$ と考えたとき, $su(2)$ のリー括弧積は $\mathbf{R}^3$ の外積と同一視される. そこで, 2次元球面 M を SU(2) の e_1 を通る随半作用の軌道と考える:

$$M = \{pe_1p^{-1} \in su(2)\,;\, p \in \mathrm{SU}(2)\}.$$

このとき, $su(2) \cong \mathbf{R}^3$ の標準的な内積 $\langle\, ,\, \rangle_{su(2)}$ によって定まる, M 上のリーマン計量 g_M は半径1の標準的なリーマン計量である. また, 自然な射影 $\pi : P \to M$, $\pi(p) = pe_1p^{-1}$ は, M 上の主 S^1 束となる. そこで, P 上の接続1形式 Θ を次で定める:

$$\Theta(A) = \frac{1}{2}\langle A, e_1 \rangle_{su(2)}, \ A \in su(2).$$

ここで, $\partial_\theta = 2e_1$ に注意しておく. このとき, 接続1形式 Θ の曲率は M の体積要素の $-(1/2)$ 倍となる. $V>0$ を正の定数として, P 上のリーマン計量 g_V を次で定める.

$$g_V(u,v) = g_M(d\pi(u), d\pi(v)) + \frac{1}{4V^2}\langle\,\Theta(u), \theta(v)\,\rangle_{su(2)}.$$

このとき特に, リーマン多様体 $(P, g_{1/2})$ は半径2の標準的球面と等長的である.

補題 13 エネルギー $e\ (>V)$ での magnetic flow φ_t^e は周期的であり, その周期は $T(e) = 2\pi\sqrt{\dfrac{e^2}{e^2-c}}$ で与えられる. 但しここで, $c = V^2 - 1/4$ とおいた.

補題13で注意すべきことは, magnetic flow の定義において, ハミルトニアン H が V に依存しているために周期も V に依存した形になっている, ということであろう. また, $V = 1/2$, つまり P に半径2の標準計量を定めたときには, $T(e) = 2\pi$ で, エネルギー準位に依存しないことにも注意しておく.

リーマン計量 g_V によって定まる, 磁場つきシュレディンガー作用素 $\hat{H}_m^V$ の固有値は,

$$\lambda_p^V(m) = \frac{1}{2}\sqrt{(2p+|m|+1)^2 + 4cm^2 - 1}, \quad p = 0,1,2,\ldots,$$

で与えられ, 固有値 $\lambda_p^V(m)$ の重複度は $2p+|m|+1$ となる ([Ku1] を参照).

命題 2 任意のエネルギー準位 $e > V \geq 1/4$ に対して, $s\text{-}D\sigma_e = \dfrac{2\pi}{T(e)}\mathbf{Z}$ が成り立つ.

証明. $m>0$ とする. $|\lambda_p^V(m) - me| \leq 1$ となるためには,

$$C_-(m) \leq p \leq C_+(m) \tag{26}$$

となることが必要十分である. 但しここで,

$$C_\pm(m) = \frac{\sqrt{4(e^2-c)m^2 \pm 8em + 5} - m - 1}{2}$$

とおいた. $C_+(m) - C_-(m) \geq 4em/\sqrt{4(e^2-c)m^2+5}$ であるから, $V > 1/4$ のとき, 十分大きな任意の m に対して式(26)を満たす様な自然数 $q_m \in \mathbf{N}$ が存在する. 任意の整数 $d \in \mathbf{Z}$ に対して $p_m = q_m + d$ とすると,

$$\lambda_{p_m}^V(m) - \lambda_{q_m}^V(m) \to (2\pi/T(e))d\ (m \to \infty)$$

となる. 逆は初等的ではあるが煩雑になるので省略する. ▮

例 2. $\mathbf{H}_1^{\mathrm{red}}$ で "簡約された" Heisenberg 群を表す ([F] を参照). つまり, $\mathbf{H}_1^{\mathrm{red}}$ は集合としては $\mathbf{R}^2 \times S^1$ であり, 以下で定義される群演算により群と考えたものである:

$$(x, y, e^{2\pi it}) \cdot (x', y', e^{2\pi it'}) = (x+x', y+y', e^{2\pi i(t+t'+(1/2)(x'y-xy'))}).$$

そこで, $\Gamma = \{(k, n, e^{\pi ikn}) \in \mathbf{H}_1^{\mathrm{red}}\}$ を $\mathbf{H}_1^{\mathrm{red}}$ 内の離散部分群とする. Γ は $\mathbf{H}_1^{\mathrm{red}}$ に固有不連続に作用し, 従って, 商空間 $P = \mathbf{H}_1^{\mathrm{red}}/\Gamma$ は多様体となる. また, P から 2 次元平坦トーラス $M = \mathrm{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ への写像$\pi : P \to M$, $\pi([x, y, e^{2\pi it}]) = (x, y) \bmod 1$ は主 S^1 束を定める. P 上の接続 1 形式 Θ を次で定義する.

$$\Theta = 2\pi \left(dt + \frac{1}{2}(xdy - ydx)\right).$$

このとき, 接続形式 Θ の曲率形式は平坦トーラス M 上の体積要素の 2π 倍になる. P 上のリーマン計量 g_P を, 式 (2) において, $V = 2\pi$ として定義する.

補題 14 任意のエネルギー準位 $e > 2\pi$ に対して, magnetic flow φ_t^e は周期的であり, その周期は, e である.

一方, 磁場つきシュレディンガー作用素の固有値は次で与えられる:

$$\lambda_p(m) = \sqrt{2\pi|m|(2p+1) + 4\pi^2 m^2} \quad p = 0, 1, 2, \ldots.$$

また, 固有値 $\lambda_p(m)$ の重複度は $|m|$ である. ([G-W] を参照.)

命題 3 任意のエネルギー準位 $e > 2\pi$ に対して, $s\text{-}D\sigma_e = \dfrac{2\pi}{e}\mathbf{Z}$ が成り立つ.

証明. 固有値 $\lambda_p(m)$ が $|\lambda_p(m) - me| \le 1$ を満たすためには,

$$C_-(m) \le p \le C_+(m) \tag{27}$$

となることが必要十分である. 但し,

$$C_\pm(m) = \frac{(me \pm 1)^2}{4\pi m} - \frac{2\pi m - 1}{2}.$$

とおいた. $C_+(m) - C_-(m) = e/\pi \ge 2$ より, 任意の正の整数 m に対して, 式 (27) を満たす自然数 q_m が存在する. このとき, 任意の整数 d に対して, $p_m = q_m + d$ とおけば,

$$\lambda_{p_m}(m) - \lambda_{q_m}(m) \to \frac{2\pi}{e} d \ (m \to \infty)$$

となる. 逆は省略する. ∎

参考文献

[F] G. Folland, "Harmonic analysis in phase space," Princeton Univ. Press, 1989.

[G-W] C. Gordon and E. Wilson, The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds, *Michigan Math. J.* **33** (1986), 253–271.

[G] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.* **44** (1977), 485–517.

[G-U1] V. Guillemin and A. Uribe, Circular symmetry and the trace formula, *Invent. Math.* **96** (1989), 385–423.

[G-U2] V. Guillemin and A. Uribe, Reduction and the trace formula, *J. Diff. Geom.* **32** (1990), 315–347.

[H] J. W. Helton, An operator algebra approach to partial differential equations; Propagation of singularities and spectral theory, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 997–1018.

[Ku1] R. Kuwabara, On spectra of the Laplacian on vector bundles, *J. Math. Tokushima Univ.* **16** (1982), 1–23.

[Ku2] R. Kuwabara, Difference spectrum of the Schrödinger operator in a magnetic field, preprint.

[P-R] V. Petkov and D. Robert, Asymptotique semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques, *Commun. P.D.E.* **10** (1985), 365–390.

[Su] T. Sunada, Euclidean versus non-Euclidean aspects in spectral geometry, *Prog. Th. Phys.* **116** (1994), 235–250.

[T1] T. Tate, Quantum ergodicity at a finite energy level, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*

[T2] T. Tate, Some remarks on the off-diagonal asymptotics in quantum ergodicity, preprint.

[Ta] M. Taylor, "Pseudodifferential Operators," Princeton Univ. Press, 1981.

[W] A. W. Wadsley, Geodesic foliations by circles, *J. Diff. Geom.* **10** (1975), 541–549.

[Z1] S. Zelditch, On a "quantum chaos" theorem of R. Schrader and M. Taylor, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 1–21.

[Z2] S. Zelditch, Quantum mixing, *J.Funct.Anal.* **140** (1996), 68–86.

[Z3] S. Zelditch, Quantum Ergodicity of C^* Dynamical Systems, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996), 507–528.